

ラリー中のテニス・ボールのバウンド

1. バウンド後のボール

ある速度、ある回転、ある角度で飛んできたボールがコート面でバウンドした後どのようなか見てみましょう。

図1のように、バウンド前のボールの水平方向の速度成分を V_{x1} 、鉛直方向の速度成分を V_{y1} 、回転速度(スピン)を N_1 、コート面に対する入射角を θ_1 とします。また、バウンド後のそれらを V_{x2} 、 V_{y2} 、 N_2 、 θ_2 とします。なお、回転速度(スピン)はトップスピンの場合を正、バックスピンの場合を負と考えます。

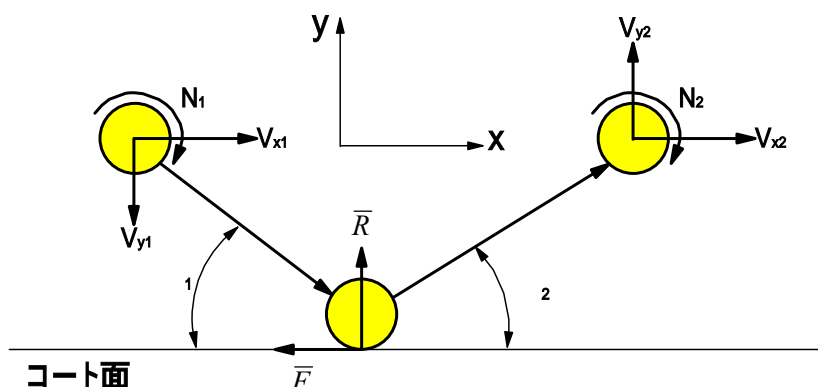


図1 テニス・ボールのバウンド

実際のボールは複雑な挙動をするものと思いますが、忠実に実際の挙動を表現することは手に負えませんので次のように仮定します。

飛んでいるボールは完全な球形である。(実際は変形しているでしょうね)

コート面に接触したときにも完全な球形を保っている。(実際は大きく変形するでしょうね)

バウンドするときのボールの復元力の影響は無視する。(実際は弾性変形したボールの復元力の影響があるでしょうね)

スピンの回転軸はコート面に平行で、飛んでいく方向に垂直である。(実際はサイドスピンなどがあり複雑でしょうね)

ボールがコート面に衝突してバウンドするような、瞬間的な力によって運動に変化が起こるような場合には、**運動量【=質量×速度】**の変化は働いた**力積【=力×力の作用時間】**に等しくなります。バウンドの瞬間にボールに働く垂直抗力、摩擦力の力積を \bar{R} 、 \bar{F} とすると次の関係が得られます。

$$M \cdot (V_{x2} - V_{x1}) = -\bar{F} \quad (1)$$

$$M \cdot (V_{y2} - V_{y1}) = \bar{R} \quad (2)$$

$$2\pi I \cdot (N_2 - N_1) = \bar{F} \cdot \frac{d}{2} \quad (3)$$

ここで、 M ：ボールの質量， I ：ボールの重心を通る回転軸周りの慣性モーメント， d ：ボールの直径です。

ボールとコート面の鉛直方向の相対速度の比によって、反発係数 e が次のように表されます。

$$e = \frac{\text{バウンド後遠ざかる鉛直方向の相対速度}}{\text{バウンド前近づく鉛直方向の相対速度}} = \frac{V_{y2}}{-V_{y1}} \quad (4)$$

通常のコート面にボールが接触して動こうとすると、摩擦が働くと考えられます。垂直抗力の力積 \bar{R} と摩擦力の力積 \bar{F} の間には次の関係が成立します。

$$\bar{F} = \mu\bar{R} \quad (5)$$

ここで、 μ ：滑り摩擦係数です。

式(4)からバウンド後の速度の鉛直成分は次のように得られます。

$$V_{y2} = -eV_{y1} \quad (6)$$

式(2)に式(5)，式(6)を代入して次式が得られます。

$$\bar{F} = -M\mu(e+1)V_{y1} \quad (7)$$

式(7)を式(1)に代入して、バウンド後の速度の水平成分が次のように得られます。

$$V_{x2} = V_{x1} + \mu(e+1)V_{y1} \quad (8)$$

式(7)を式(3)に代入して、バウンド後の回転速度が次のように得られます。

$$N_2 = N_1 - \frac{dM\mu}{4\pi l}(e+1)V_{y1} \quad (9)$$

ボールの入射角 θ_1 と反射角 θ_2 の間には次の関係があります。

$$\theta_1 = \tan^{-1}\left(\frac{-V_{y1}}{V_{x1}}\right) \quad (10)$$

$$\theta_2 = \begin{cases} \tan^{-1}\left(\frac{V_{y2}}{V_{x2}}\right) & @ V_{x2} \geq 0 \\ \tan^{-1}\left(\frac{V_{y2}}{V_{x2}}\right) + \pi & @ V_{x2} < 0 \quad (\text{バックスピンドで手前に戻る場合}) \end{cases} \quad (11)$$

2. 実際の問題についての試算

2.1 計算準備

- ・ ルールブックの第二部・規則3・(b)の規定からボールの質量は56.0 g ~ 59.4 g となっていますので、中央の値をとって $M = 5.89 \times 10^{-5} \text{ kgf} \cdot \text{s}^2 / \text{cm}$ (57.7g) とします。
- ・ ルールブックの第二部・付則1・(4)からボールの直径は6.541 cm ~ 6.858 cm 【BT1 (Fast), BT2 (Medium) の場合】 ですから中央の値を使って $d = 6.7 \text{ cm}$ とします。
- ・ 反発係数は【テニスの力学 - 2：テニス・ボールのバウンド (自由落下)】で求めたように $e = 0.754 \sim 0.789$ であるので平均値をとって $e = 0.77$ とします。
- ・ 滑り摩擦係数は参考文献1 から $\mu = 0.6$ とします。
- ・ ボールの回転軸周りの慣性モーメント I は、ボールを質量 M で肉厚 t の均質な球殻として次の式で表されます。(球殻の慣性モーメントについてはAppendix-1 に詳細を示します)

$$I = \frac{M}{10} \cdot \frac{d^5 - (d - 2t)^5}{d^3 - (d - 2t)^3} = \frac{5.89 \times 10^{-5}}{10} \cdot \frac{6.7^5 - (6.7 - 2 \times 0.7)^5}{6.7^3 - (6.7 - 2 \times 0.7)^3} = 3.614 \times 10^{-4} \text{ kgf} \cdot \text{cm} \cdot \text{s}^2$$

ボールの肉厚 t は、ボールを切断して測定したところ、ゴムが肉厚0.4 cm、メルトンが肉厚0.3 cm でした。(図2に写真を示します) ゴムとメルトンでは密度が異なりますが、ここでは、ゴムとメルトンの肉厚を足した0.7 cm をボールの肉厚としました。

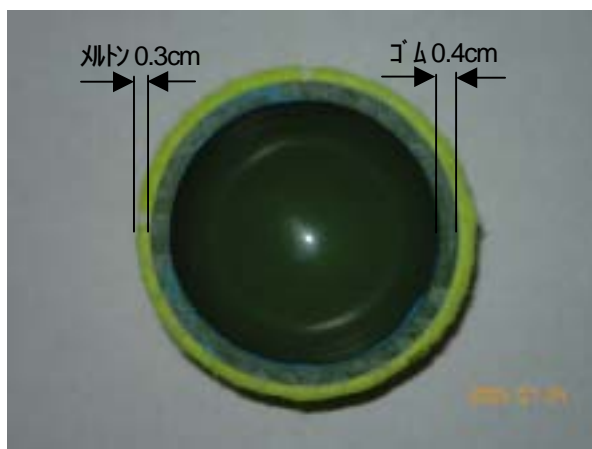


図2 テニスボール断面 (Wilson)

2.2 考察

2.2.1 バウンド後のボールが戻ってしまう条件

ある条件でボールがバウンドすると、ボールが自分の方に飛んでこないで相手の方に戻ってしまいます。その条件は、バウンド後のボールの水平方向の速度成分 V_{x2} が零または負になる条件を求めることになります。

式(8)が零または負とにおいて次の関係が得られます。

$$V_{x2} = V_{x1} + \mu(e+1)V_{y1} \leq 0 \tag{12}$$

式(12)の両辺を $V_{x1} (\neq 0)$ で割ると次の関係が得られます。

$$1 + \mu(e+1)\frac{V_{y1}}{V_{x1}} \leq 0 \tag{13}$$

式(10)を式(13)に代入して整理すると次のようになります。

$$\theta_1 \geq \tan^{-1}\left(\frac{1}{\mu(e+1)}\right) \tag{14}$$

すなわち、飛んでくるボールの速度には無関係に、入射角が式(14)の関係であると、ボールはバウンド後、相手の方に戻ってしまいます。

2.1 項で求めた滑り摩擦係数 $\mu = 0.6$ と反発係数 $e = 0.77$ を式(14)に代入して次の条件が得られます。

$$\theta_1 \geq \tan^{-1}\left(\frac{1}{0.6 \times (0.77 + 1)}\right) = 43.28^\circ \tag{15}$$

入射角度が 43.28° より大きい場合、ボールは戻ってしまいます。

2.2.2 スピンについて

式(9)を見ると、 $V_{y1} < 0$, $M, \mu, e, I > 0$ であるので、 $N_2 > N_1$ となります。したがって、トップスピン ($N_1 > 0$) のボールはバウンドした後も必ずトップスピンとなります。

しかし、バックスピン ($N_1 < 0$) のボールは、ある条件でバウンド後にトップスピンに変わります。その条件を求めてみましょう。

式(9)の両辺を $N_1 (\neq 0)$ で割って次の関係が得られます。

$$\frac{N_2}{N_1} = 1 - \frac{dM\mu}{4\pi IN_1}(e+1)V_{y1} \tag{16}$$

バックスピンのボールがバウンドによってトップスピンに変わるということは N_1 と N_2 の符号が反転するわけですから、式(16)は負になり、次の関係が得られます。

$$1 - \frac{dM\mu}{4\pi IN_1}(e+1)V_{y1} < 0 \tag{17}$$

$N_1 < 0$ (バックスピン) であることを考慮して式(17)の両辺に N_1 を掛けると次の関係が得られます。

$$N_1 > \frac{dM\mu}{4\pi I}(e+1)V_{y1} \tag{18}$$

2.1 項で求めた d, M, μ, e, I を式(18)に代入すると次の関係が得られます。

$$N_1 > 0.0923 \times V_{y1} \tag{19}$$

2.3 いくつかの条件での計算

表1にいくつかの条件での計算結果を示します。

表1 バウンド前後のボールの挙動

No.	バウンド前					バウンド後					備考
	入射速度 V_1	入射角 θ_1	水平速度 成分 V_{x1}	鉛直速度 成分 V_{y1}	入射回転 速度 N_1	反射速度 V_2	反射角 θ_2	水平速度 成分 V_{x2}	鉛直速度 成分 V_{y2}	反射回転 速度 N_2	
	m/sec	deg	m/sec	m/sec	rev/sec	m/sec	deg	m/sec	m/sec	rev/sec	
1	25.8	18.4	24.5	-8.1	68	17.03	21.61	15.83	6.27	143.15	本解析の結果
						17.10	20.70	-	-	146.00	参考文献2の図39
2	25.7	9.9	25.3	-4.4	0	20.90	9.37	20.62	3.40	40.78	本解析の結果
						20.90	9.00	-	-	42.00	参考文献2の図41
3	18.3	9.4	18.1	-3.0	-49	15.06	8.79	14.88	2.30	-21.42	本解析の結果
						15.10	8.40	-	-	-21.00	参考文献2の図43
4	25	15	24.1	-6.5	60	17.98	16.09	17.28	4.98	119.71	トップスピン
5	25	8	24.8	-3.5	60	21.23	7.25	21.06	2.68	92.11	入射角の相違
6	25	15	24.1	-6.5	-60	17.98	16.09	17.28	4.98	-0.29	バックスピン
7	25	8	24.8	-3.5	-60	21.23	7.25	21.06	2.68	-27.89	入射角の相違
8	20	43.28	14.6	-13.7	60	10.56	90.01	0.00	10.56	186.53	バウンド後に止まってしまう
9	20	30	17.3	-10.0	-92.28	10.21	48.97	6.70	7.70	0.00	バックスピンからトップスピンへの変化

今回の解析が正しいかどうか参考文献2に示されているデータで確認しました。参考文献2では、計算式は示されず、バウンド前の条件とバウンド後の結果だけが示されています。表1のNo.1~No.3のバウンド前の条件は参考文献2の図39, 図41, 図43に合わせました。バウンド後の結果は黒字が今回の解析結果で、赤字が参考文献2の結果です。ほぼ一致しています。今回の解析結果は大きく間違っていることはないでしょう。(ふー、よかった)

図3は、表1のNo.1を図示しています。線の長さが速度に比例し、ボールの直径が回転速度に比例します。

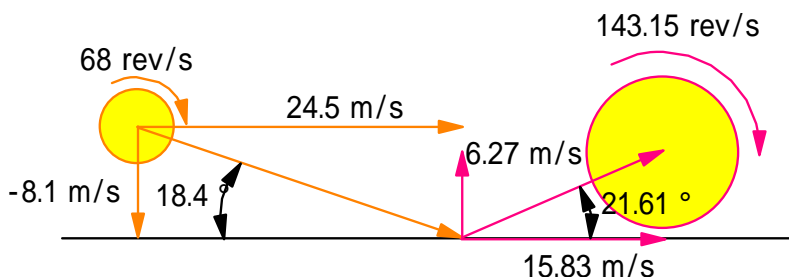


図3 表1のNo.1の図示

表1のNo.4とNo.5は、トップスピンの同一入射速度で、入射角度が異なる場合を示しています。次の特徴があります。

- ・ 入射角度が大きい場合は、バウンド後のボールの回転速度が非常に大きくなります。いわゆる重いボールでしょう。打ち負けないようにしなければなりません。
- ・ 入射角度が小さい場合は、バウンド後の水平速度が速くなります。小さい角度で飛んでくるボールには打ち遅れないようにする必要がありますね。

表1のNo.6とNo.7は、バックスピンの同一入射速度で、入射角度が異なる場合を示しています。次の特徴があります。

- ・ 入射角度が大きい場合は、ボールの回転速度がほとんどなくなります。バックスピンで大きい角度で飛んでくるボールは、スピンの変化に注意が必要です。
- ・ 入射角度が小さい場合は、バウンド後の水平速度が速く、バックスピンの回転速度もあまり落ちません。

表1のNo.8は、2.2.1項で考察したように、ボールが元に戻ってしまう入射角度 ($\theta_1 = 43.28^\circ$) の場合です。入射速度、入射回転速度が変わっても、この入射角度を超えると、ボールはバウンド後に元に戻ってしまいます。コート面から 43.28° の角度はどの程度なのか、体で覚えておきましょう。

図4は、表1のNo.8を図示しています。線の長さが速度に比例し、ボールの直径が回転速度に比例します。

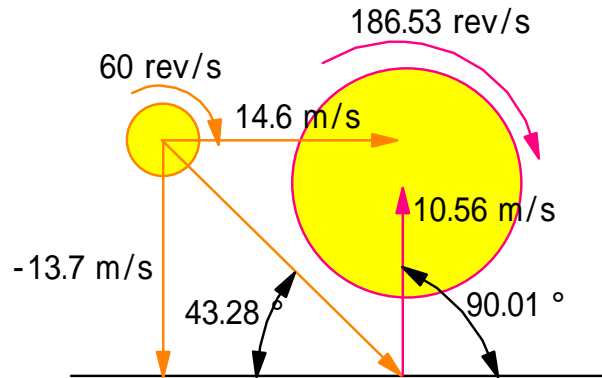


図4 表1のNo.8の図示

表1のNo.9は、2.2.2項で考察したように、バックスピンのボールがバウンド後にトップスピンに変化する限界の入射回転速度の場合を示しています。バウンド前に -92.28 rev/sec であった回転速度がバウンド後は零になります。バウンド前の回転速度がこれより大きくなると、バウンド後にはトップスピンに変化します。

図5は、表1のNo.9を図示しています。線の長さが速度に比例し、ボールの直径が回転速度に比例します。

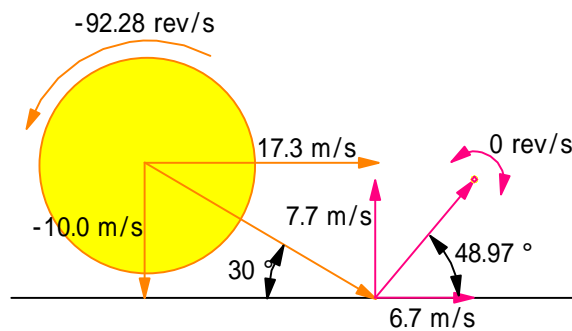


図5 表1のNo.9の図示

【参考文献】

1. Rod Cross, Measurements of the horizontal coefficient of restitution for a superball and a tennis ball, Am. J. Phys. 70 (5), May 2002, p482-489
2. 三浦公亮, 蝶間林利男著, テニスの科学, 光文社

Appendix-1 球殻の慣性モーメント

ある軸から、質量 M の剛体に属する質点 m_i までの距離を r_i とするとき、

$$I = \sum m_i r_i^2 \quad (\text{Ap1-1})$$

で表される量 I を、この剛体の、この軸に関する慣性モーメントといいます。

球殻の慣性モーメントを求める準備として、薄い円板の中心を通り円板に垂直な軸に関する慣性モーメントを求めます。(図 Ap1-1 参照)

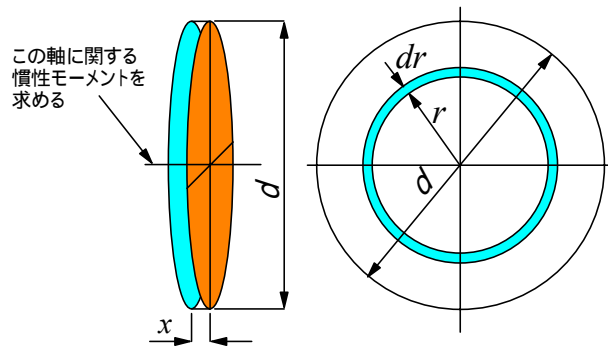


図 Ap1-1 薄い円板の慣性モーメント

円板の直径を d 、厚さを x 、密度を ρ とします。軸から半径 r の位置にある微小肉厚 dr の中空円筒を切り出します。この中空円筒の質量は【 $2 \cdot \pi \cdot r \cdot x \cdot \rho \cdot dr$ 】となります。軸からの距離は r なので、この軸に関する慣性モーメント I は式(Ap1-1)から次のようになります。

$$\begin{aligned} I &= \int_0^{\frac{d}{2}} (2 \cdot \pi \cdot r \cdot x \cdot \rho \cdot dr) \cdot r^2 \\ &= 2 \cdot \pi \cdot x \cdot \rho \cdot \int_0^{\frac{d}{2}} r^3 dr \\ &= 2 \cdot \pi \cdot x \cdot \rho \cdot \left[\frac{r^4}{4} \right]_0^{\frac{d}{2}} = \frac{1}{32} \pi \cdot x \cdot d^4 \cdot \rho \end{aligned} \quad (\text{Ap1-2})$$

球殻の中心を通る軸はたくさんありますが、どの軸まわりを考えても対称性から慣性モーメントは同一になります。したがって、中心を通る任意の軸に関する慣性モーメントを求めればよいことになります。

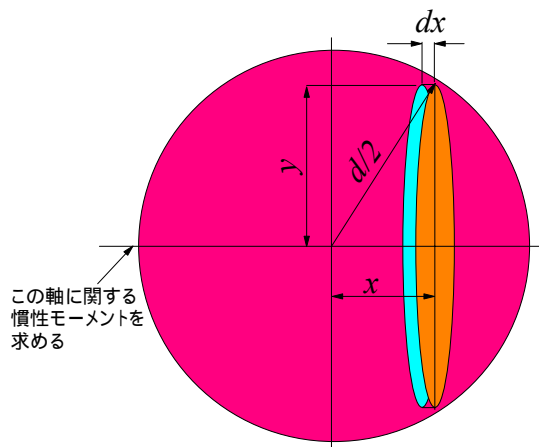


図 Ap1-2 球の慣性モーメント

図 Ap1-2 のように、質量 M 、直径 d の球の中心を通る軸に関する慣性モーメントを求めます。直径 d の球を回転軸に垂直な薄い円板に切ります。この薄い円板の厚さを dx 、直径を $2y$ 、球の密度を ρ とすると、薄い円板の慣性モーメント dI は式(Ap1-2)から次のようになります。

$$dI = \frac{1}{32} \pi \cdot dx \cdot (2y)^4 \cdot \rho \quad (\text{Ap1-3})$$

図 Ap1-2 から次の関係が得られます。

$$y = \sqrt{\frac{d^2}{4} - x^2} \quad (\text{Ap1-4})$$

式(Ap1-4)を式(Ap1-3)に代入して積分することで、次のように球の慣性モーメント I を求めることができます。

$$\begin{aligned} I &= \int_{-\frac{d}{2}}^{\frac{d}{2}} \frac{1}{32} \pi \cdot dx \cdot 16 \cdot \left(\frac{d^2}{4} - x^2 \right)^2 \cdot \rho = \frac{\pi}{2} \rho \int_{-\frac{d}{2}}^{\frac{d}{2}} \left(\frac{d^4}{16} - \frac{d^2}{2} x^2 + x^4 \right) \cdot dx \\ &= \frac{\pi}{2} \rho \left[\frac{d^4}{16} x - \frac{d^2}{6} x^3 + \frac{1}{5} x^5 \right]_{-\frac{d}{2}}^{\frac{d}{2}} = \frac{\pi}{60} \rho \cdot d^5 = \frac{1}{10} M \cdot d^2 \end{aligned} \quad (\text{Ap1-5})$$

いよいよ球殻の慣性モーメントです。テニスボールを質量 M 、直径 d 、肉厚 t の球殻と考えます。肉厚はメルトンとゴムの部分を加えた厚さとし、メルトンとゴムの密度は等しいと仮定します。

中実（中が詰まっている）だと考えた場合のテニスボールの慣性モーメント I_1 は式(Ap1-5)と同じですから次のように表されます。

$$I_1 = \frac{\pi}{60} \rho \cdot d^5 \quad (\text{Ap1-6})$$

中空部分を考えます。もし中空部分に同一密度のものが詰まっていると考えると、この部分の慣性モーメント I_2 は直径が $(d - 2t)$ の球の慣性モーメントに等しいことから次のように表されます。

$$I_2 = \frac{\pi}{60} \rho (d - 2t)^5 \quad (\text{Ap1-7})$$

慣性モーメントの定義である式(Ap1-1)から、テニスボール(球殻)の慣性モーメント I_{ball} は I_1 から I_2 を引けばよいことが分かります。したがって、次のように表すことができます。

$$I_{ball} = I_1 - I_2 = \frac{\pi}{60} \rho \cdot d^5 - \frac{\pi}{60} \rho (d - 2t)^5 = \frac{\pi}{60} \rho [d^5 - (d - 2t)^5] \quad (\text{Ap1-8})$$

一方、テニスボール(球殻)の質量 M は次のように表されます。

$$M = \frac{4}{3} \pi \left(\frac{d}{2} \right)^3 \rho - \frac{4}{3} \pi \left(\frac{d - 2t}{2} \right)^3 \rho = \frac{\pi}{6} \rho [d^3 - (d - 2t)^3] \quad (\text{Ap1-9})$$

式(Ap1-8)と式(Ap1-9)からテニスボール(球殻)の慣性モーメントは次のように表すことができます。

$$I_{ball} = \frac{M}{10} \cdot \frac{d^5 - (d - 2t)^5}{d^3 - (d - 2t)^3} \quad (\text{Ap1-10})$$